# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
## Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 1)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

18 марта 2020 г.

Идея применения рядов по специально построенным системам функций для решения прикладных задач была предложена в трудах французского математика и физика **Жан-Батиста Жозефа Фурье**.
В своем докладе в Парижской Академии наук (1807), а затем в своем мемуаре «Аналитическая теория теплоты» (1822) он изложил подход к изучению процессов распространения тепла, суть которого может быть продемонстрирована на следующем простом **модельном примере**.

Рассмотрим задачу распространения тепла в тонком стержне конечной длины, на концах которого поддерживается постоянная температура. С математической точки зрения эта задача сводится к нахождению функции $u(x,t)$ координаты точки на стержне $x$ и времени $t$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{0.1}$$

Здесь $t > 0$, а $x$ меняется на конечном интервале – например, $0 < x < 1$. Постоянство температуры на концах сводится к условиям

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{0.2}$$

Кроме того, задается начальное (при $t = 0$) распределение температуры стержня

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1. \tag{0.3}$$

Таким образом, искомая функция $u = u(x,t)$ является решением следующей начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{0.4}$$

Идея Фурье состояла в том, чтобы **«собрать» решение** $u(x,t)$ задачи (0.4) **из простейших решений**, удовлетворяющих только (0.1) и (0.2):

$$u_n(x,t) = e^{-\mu_n^2 t} \sin \mu_n x, \tag{0.5}$$

где $\mu_n = \pi n$, $n = 1, 2, \ldots$.
«Собрать» – значит использовать линейную комбинацию решений (0.5):

$$u(x,t) \sim \sum_n c_n u_n(x,t). \tag{0.6}$$

Осталось при такой «сборке» только учесть условие (0.3).

Если, например, $\varphi(x) = \sin 2\pi x - \sin \pi x$, то ответ очевиден

$$u(x,t) = -u_1(x,t) + u_2(x,t).$$

Если же $\varphi(x)$ – какая-то функция общего вида, то «сборка» (0.6) с конечной линейной комбинацией невозможна и надо использовать полный ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t), \tag{0.7}$$

а коэффициенты $c_n$ выбирать так, чтобы

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \mu_n x. \tag{0.8}$$

Так, **задача сводится к разложению заданной функции $\varphi(x)$ в ряд по специальной системе функций**.

Подобная задача имеет знакомый аналог в теории конечномерных евклидовых пространств.
Оказалось, что система $\{\sin \mu_n x\}_{n\geq 1}$ ортогональна в смысле скалярного произведения

$$(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

А для ортогональных базисов $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ в $N$-мерном евклидовом пространстве справедливо явное разложение

$$f = \sum_{n=1}^{N} \frac{(f, \psi_n)}{(\psi_n, \psi_n)} \psi_n. \tag{0.9}$$

**В бесконечномерном случае** приходится отвечать на дополнительные, более сложные вопросы. Например,
– достаточно ли функций в системе $\{\sin \mu_n x\}_{n\geq 1}$ для построения аналога разложения (0.9) в виде (0.8),
– есть ли в системе «лишние» функции, после исключения которых разложение (0.8) возможно,
– в каком смысле следует понимать сходимость ряда (0.8).

**Решению этих и некоторых других вопросов, связанных с разложениями в функциональные ряды, и будут посвящены разделы этой главы.**

## § 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье

## 1.1. Бесконечномерные пространства со скалярным произведением.

Пусть $L$ – вещественное линейное пространство и $\dim L = \infty$.

**Опр. 1.** $L$ называется евклидовым пространством, если на нем введено отображение (скалярное произведение)

$$\forall f, g \in L \;\mapsto\; (f, g) \in \mathbb{R},$$

обладающее следующими свойствами:

- $(f, g) = (g, f) \quad \forall f, g \in L$ (симметричность);
- $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h) \quad \forall f, g, h \in L \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (линейность по первому аргументу);
- $(f, f) \geq 0 \quad \forall f \in L$ и $(f, f) = 0 \iff f = \theta$ (положительная определенность).

Как известно, в евклидовом пространстве:
– скалярное произведение линейно и по второму аргументу,
– выполнено неравенство Коши–Буняковского:

$$(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g) \quad \forall f, g \in L, \tag{1}$$

причем равенство возможно только тогда, когда либо $f = \alpha g$, либо $g = \alpha f$ с некоторым $\alpha \in \mathbb{R}$.

Нам понадобится также более широкий класс пространств со скалярным произведением.

**Опр. 2.** $L$ называется псевдоевклидовым пространством, если на нем введено отображение (скалярное произведение)

$$\forall f, g \in L \ \mapsto \ (f, g) \in \mathbb{R},$$

которое удовлетворяет первому и второму свойствам из Опр.$1$, а вместо третьего свойства выполнено следующее:

- $(f, f) \geq 0 \quad \forall f \in L$ (неотрицательная определенность).

Отметим, что в псевдоевклидовом пространстве остается справедливым само неравенство Коши–Буняковского:

$$(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g) \quad \forall f, g \in L. \tag{1}$$

Будем далее использовать для евклидова пространства обозначение $E$, а для псевдоевклидова пространства – обозначение $\widetilde{E}$.

**Примеры**

**1.** $C[a,b]$ – **пространство непрерывных на** $[a,b]$ **функций** со скалярным произведением

$$(f,g)=\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{2}$$

$C[a,b]$ – бесконечномерное евклидово пространство (проверьте!).

**2.** $E_0[a,b]$ – **пространство кусочно-непрерывных на** $[a,b]$ **функций** со скалярным произведением (2). Оно состоит из функций $f(x)$, которые непрерывны на $[a,b]$ кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода $x_i\in(a,b)$, $i=\overline{1,m}$, причем в каждой точке разрыва

$$f(x_i)=\frac{1}{2}\left(f(x_i-0)+f(x_i+0)\right).$$

$E_0[a,b]$ – бесконечномерное евклидово пространство (проверьте!).

**3.** $\mathcal{R}[a,b]$ – **пространство всех функций, интегрируемых по Риману на** $[a,b]$, со скалярным произведением (2).
$\mathcal{R}[a,b]$ – бесконечномерное псевдоевклидово пространство (проверьте!).

Определим также вещественные линейные пространства с нормой.

**Опр. 3.** $L$ называется нормированным пространством, если на нем введено отображение (норма)

$$\forall f \in L \mapsto \|f\| \in \mathbb{R},$$

обладающее следующими свойствами:

- $\|f\| \geq 0 \quad \forall f \in L$ и $\|f\| = 0 \iff f = \theta$ (положительная определенность);
- $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\| \quad \forall f \in L \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (положительная однородность);
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \forall f \in L$ (неравенство треугольника).

**Опр. 4.** $L$ называется почти нормированным пространством, если на нем введено отображение (полунорма)

$$\forall f \in L \mapsto \|f\| \in \mathbb{R},$$

которое обладает вторым и третьим свойствами Опр.3 и вместо первого свойства выполнено следующее:

- $\|f\| \geq 0 \quad \forall f \in L$ (неотрицательная определенность).

**Замечание.** Любое евклидово пространство $E$ можно превратить в нормированное, положив $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$. Это же правило превращает любое псевдоевклидово пространство $\widetilde{E}$ в почти нормированное.

В обоих случаях неравенство Коши–Буняковского может быть записано в виде

$$|(f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad f,g \in E\,(\widetilde{E}) \tag{3}$$

### 1.2. Ортонормированные системы.

**Опр. 5.** Элементы $f, g \in E\,(\widetilde{E})$ называются ортогональными, если $(f, g) = 0$.

**Опр. 6.** Система $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \in E\,(\widetilde{E})$ называется ортонормированной (ОНС), если

$$(\psi_k, \psi_j) = 0 \quad \forall k \neq j, \qquad \|\psi_k\| = 1 \quad \forall k.$$

**Важный пример** (Л.Эйлер, 1793). В $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$ тригонометрическая система функций (ТрСФ):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{4}$$

образует бесконечную ОНС (проверьте!).

**Замечание.** Есть и другие примеры ОНС.

Например, в $\mathcal{R}[-1, 1]$ ОНС образуют так называемые полиномы Лежандра. В $\mathcal{R}[0, 1]$ ОНС являются системы Радемахера и Хаара, состоящие из кусочно-постоянных разрывных функций.

Рассмотрим произвольную ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E\,(\widetilde{E})$.

**Опр. 7.** Рядом Фурье для $f \in E\,(\widetilde{E})$ по системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется формальный ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f,\psi_k)\psi_k, \tag{5}$$

где коэффициенты $(f,\psi_k) \equiv f_k$ называются коэффициентами Фурье для $f$.

Отметим, что в конечномерном пространстве $E$ с ортонормированным базисом $\{\psi_k\}_{k=1}^{n}$ коэффициенты Фурье являются координатами рассматриваемого вектора $f \in E$:

$$f = \sum_{k=1}^{n}(f,\psi_k)\psi_k, \qquad f \in E.$$

Разъясним выбор коэффициентов ряда Фурье (5) в бесконечномерных пространствах.

**Свойство коэффициентов Фурье.**

Для произвольных чисел $c_k \in \mathbb{R}$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ преобразуем следующую величину:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\|^2 = \left( \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f, \sum_{l=1}^{n} c_l \psi_l - f \right) =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} c_k c_l (\psi_k, \psi_l) - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k (f, \psi_k) + (f, f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k f_k + \sum_{k=1}^{n} f_k^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2 \qquad (6)$$

Полученное равенство (6) доказывает следующее принципиальное утверждение.

### Теорема 1.

*Среди всевозможных линейных комбинаций элементов* $\psi_1, \dots, \psi_n$ *ОН системы* $n$*-я частичная сумма ряда Фурье (5) дает наименьшее отклонение по норме от* $f$*, причем выполнено равенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{7}$$

= = = = = = *Продолжение следует* = = = = = =

# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 2)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

25 марта 2020 г.

## § 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье
(продолжение)

### 1.2. Ортонормированные системы. Свойство коэффициентов Фурье

Рассматривается произвольная ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E\,(\widetilde{E})$ и ряд Фурье элемента $f \in E\,(\widetilde{E})$ по этой системе

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k, \qquad f_k = (f, \psi_k). \tag{5}$$

Для произвольных чисел $c_k \in \mathbb{R}$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ получено тождество:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2 \tag{6}$$

и сформулирована теорема.

### Теорема 1.

*Среди всевозможных линейных комбинаций элементов $\psi_1, \dots, \psi_n$ ОНС $n$-я частичная сумма ряда Фурье (5) дает наименьшее отклонение по норме от $f$, причем выполнено равенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{7}$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}(c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2 \tag{6}$$

1. При всех $c_k \in \mathbb{R}$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \tag{6.1}$$

2. При $c_k = f_k$ , $k = \overline{1,n}$, неравенство (6.1) перейдет в равенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{7}$$

3. При любых $c_k \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right\|^2 \geq \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\|^2 . \tag{6.2}$$

Равенство (7) теоремы часто называют **аналогом теоремы Пифагора**.

Действительно, в силу того, что $\psi_1, \dots, \psi_n$ – ОНБ своей линейной оболочки, получим

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\|^2$$

и равенство (7) переходит в соотношение

$$\|f\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\|^2 + \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\|^2$$

т.е. $\|f\|^2$ есть сумма квадратов норм ортогональной проекции $f$ и перпендикуляра из $f$ на подпространство $\mathcal{L}(\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Последнее равенство можно также переписать в следующем виде

$$\|f\|^2 = \|f_1\psi_1\|^2 + \ldots + \|f_n\psi_n\|^2 + \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\|^2,$$

что является аналогом общей теоремы Пифагора в $(n+1)$-мерном пространстве.

Равенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \tag{7}$$

принято называть **тождеством Бесселя**.
Отметим важное следствие тождества Бесселя.

### Теорема 2.

*Для любой ОНС* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \in E\,(\widetilde{E})$ *и любого* $f \in E\,(\widetilde{E})$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f\|^2 \tag{8}$$

(*так называемое* **неравенство Бесселя**).

**Доказательство.** Из (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \|f\|^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Значит, частичные суммы ряда ограничены $\Rightarrow$ он сходится и его сумма $\leq \|f\|^2$. ■

**Теорема 2.**

*Для любой ОНС* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \in E\,(\widetilde{E})$ *и любого* $f \in E\,(\widetilde{E})$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f\|^2. \tag{8}$$

**Следствие из теоремы 2.**

*Для любого элемента* $f \in E\,(\widetilde{E})$ *его коэффициенты Фурье* $f_k$*:*

$$f_k \equiv (f, \psi_k) \to 0 \qquad k \to \infty.$$

Теперь переформулируем полученные для общих рядов Фурье результаты в случае **тригонометрической системы функций** в пространстве $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{4}$$

Итак, для $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ рассмотрим следующий **тригонометрический ряд Фурье** (ТРФ):

$$f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( f_k' \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + f_k'' \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right), \tag{9}$$

где

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,$$

$$f_k' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad f_k'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt.$$

Неравенство Бесселя (8) приобретет вид

$$f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( (f_k')^2 + (f_k'')^2 \right) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{10}$$

Введем теперь для ТРФ

$$f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( f_k' \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + f_k'' \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right), \tag{9}$$

новые константы

$$a_0 = \frac{2f_0}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt,$$

$$a_k = \frac{f_k'}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt, \;\; b_k = \frac{f_k''}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt.$$

Тогда ТРФ примет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos kx + b_k \sin kx \right), \tag{11}$$

а неравенство Бесселя – вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k^2 + b_k^2 \right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx, \tag{12}$$

$$a_k \to 0, b_k \to 0 \quad k \to \infty.$$

## § 2. Замкнутые и полные ортонормированные системы

### 2.1. Замкнутые системы

Рассмотрим пространство $E\,(\widetilde{E})$ и в нем произвольную систему $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

**Опр. 1.** Система $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется **замкнутой** в $E\,(\widetilde{E})$, если
$\forall f \in E\,(\widetilde{E}) \;\; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \;\; \exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}:$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f \right\| < \varepsilon. \tag{1}$$

Отметим, что замкнутость не означает существование ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k,$$

сходящегося к $f$ по норме. С изменением точности $\varepsilon > 0$ в (1) может меняться не только $n \in \mathbb{N}$, но и (полностью!) набор коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$.

**Теорема 3.**

*Если ОНС* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *замкнута в* $E\,(\widetilde{E})$, *то для любого* $f \in E\,(\widetilde{E})$ *неравенство Бесселя переходит в точное равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2 \tag{2}$$

(*называемое* **равенством Парсеваля**).

**Доказательство.** В силу замкнутости: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\ \exists c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k - f \right\|^2 < \varepsilon^2.$$

Из неравенства (6.1) после теоремы 1 о наилучшем приближении

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \le \left\| \sum_{k=1}^{N} c_k \psi_k - f \right\|^2 < \varepsilon^2,$$

где $f_k$ – коэффициенты Фурье для $f$. Тогда для $\forall n \ge N$ справедливо

$$0 \le \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 < \varepsilon^2. \qquad \blacksquare$$

**Теорема 4.**

*Если ОНС* $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *замкнута в* $E\,(\widetilde{E})$, *то для любого* $f \in E\,(\widetilde{E})$ *его ряд Фурье сходится к* $f$ *по норме:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| = 0. \tag{3}$$

**Доказательство.** В силу тождества Бесселя (7) теоремы 1 о наилучшем приближении

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2,$$

а правая часть здесь стремится к нулю при $n \to \infty$. ■

Итак, для ответа на вопрос о сходимости ТРФ осталось установить, что *тригонометрическая система функций замкнута* в $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$. Тогда из теоремы 4 будет следовать его сходимость по норме $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$, т.е. *сходимость в среднем*.

## 2.2. Полнота системы

Рассмотрим пространство $E\,(\widetilde{E})$ и в нем произвольную систему $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

**Опр. 2.** Система $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется **полной** в $E\,(\widetilde{E})$, если из равенств $(f, \psi_k) = 0\ \forall k$ следует, что $f = \theta$.

### Теорема 5.

*В $E$ любая замкнутая ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна.*

**Доказательство.** В силу теоремы 3

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2.$$

Если элемент $f$ имеет только нулевые коэффициенты Фурье, то ряд в левой части равен $0 \Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow f = \theta$. ■

Отметим, что обратное утверждение, вообще говоря неверно. Однако, если $E$ – гильбертово пространство, то из полноты ОНС следует ее замкнутость в $E$.

**Теорема 6.**

*Для любой полной ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ два различных элемента $f, g \in E$ не могут иметь одинаковые ряды Фурье.*

**Доказательство.** Пусть $f, g \in E$: $f_k = g_k \, \forall k$. Тогда

$$(f, \psi_k) = (g, \psi_k) \ \forall k \ \Rightarrow \ (f - g, \psi_k) = 0 \ \forall k \ \Rightarrow \ f - g = \theta. \ \blacksquare$$

## § 3. Сходимость средних Чезаро тригонометрического ряда Фурье

Рассмотрим $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, для которых существуют $f(-\pi+0), f(\pi-0)$, и соответствующий ТРФ:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,. \qquad (1)$$

Так как слагаемые правой части $2\pi$-периодические функции на $\mathbb{R}$, то естественно перейти в левой части от $f(x)$, $-\pi \le x \le \pi$, к ее периодическому продолжению на $\mathbb{R}$.

**Опр.** Функция $F(x)$ называется **периодическим продолжением** $f(x)$, $-\pi \le x \le \pi$, на $\mathbb{R}$, если

- $F(x) = f(x)$, $-\pi < x < \pi$;
- $F(-\pi) = F(\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0))$;
- $F(x+2\pi) = F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем сохраним для периодического продолжения функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ ее исходное обозначение: $f(x)$.

Отметим простое свойство интеграла от $2\pi$-периодической функции.

$$\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t)\,dt = \int\limits_{-\pi-x}^{-\pi} f(t)\,dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \int\limits_{\pi}^{\pi-x} f(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\pi-x}^{\pi} f(t-2\pi)\,dt + \int\limits_{\pi}^{\pi-x} f(t)\,dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t)\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

или

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

## 3.1. Интегральное представление для частичных сумм ТРФ.

Рассмотрим

$$S_n(x,f) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad n \geq 1,$$

$$S_0(x,f) = \frac{a_0}{2}.$$

Тогда

$$S_n(x,f) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky\,dy + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin ky\,dy\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right\}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right\}dt.$$

Так как
$$\left\{\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt\right\}\cdot 2\sin\frac{t}{2}=\sin(n+\frac{1}{2})t,$$
то
$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{4}$$
или
$$S_n(x,f)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt, \tag{5}$$
где
$$D_n(t)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{t}{2}} \tag{6}$$
– так называемое **ядро Дирихле**.

Отметим два свойства ядра Дирихле.

**Лемма 1.**

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

**Доказательство.** Рассмотрим ТРФ для функции $f(x) \equiv 1$. Так как $f(x) \equiv 1$ ортогональна всем синусам $\sin kx$ и косинусам $\cos kx$ в тригонометрической системе, то

$$a_k = b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 1.$$

Из интегрального представления (5) сразу следует (7). ■

**Лемма 2.**

$$S_n(x,f) - f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,[f(x+t) - f(x)]\;dt \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 3)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

08 апреля 2020 г.

# § 3. Сходимость средних Чезаро тригонометрического ряда Фурье
(продолжение)

## 3.2. Интегральное представление для средних Чезаро ТРФ

### 3.2. Интегральное представление для средних Чезаро ТРФ.

*Суммирование рядов методом средних арифметических (метод Чезаро)*

Пусть дан ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k,$$

частичные суммы которого

$$S_0 = u_0,\ S_1 = u_0 + u_1,\ S_2 = u_0 + u_1 + u_2, \ldots, S_{n-1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}, \ldots$$

образуют сходящуюся или расходящуюся последовательность.

Говорят, что ряд суммируем методом Чезаро, если последовательность средних арифметических

$$\sigma_1 = S_0,\ \sigma_2 = \frac{1}{2}(S_0+S_1),\ \sigma_3 = \frac{1}{3}(S_0+S_1+S_2), \ldots, \sigma_n = \frac{1}{n}(S_0+S_1+\ldots+S_{n-1}), \ldots$$

сходится, а ее предел $A$ называется обобщенной суммой рассматриваемого ряда.

Данный метод суммирования является регулярным, так как если исходный ряд сходится к $S$, то и обобщенная сумма ряда равна $S$.

Для тригонометрического ряда

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

рассмотрим его частичные суммы

$$S_0(x,f) = \frac{a_0}{2}, \quad S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, \quad n \geq 1,$$

и построим последовательность их средних арифметических

$$\sigma_1(x,f) = S_0(x,f), \quad \sigma_2(x,f) = \frac{1}{2}\big(S_0(x,f) + S_1(x,f)\big), \ldots,$$
$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n}\big(S_0(x,f) + S_1(x,f) + \ldots + S_{n-1}(x,f)\big), \ldots$$

Получим компактное представление для средних Чезаро $\sigma_n(x,f)$.

Используем представление для $S_n(x,f)$:

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{4}$$

Тогда

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x,f) = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\right\}dt.$$

Так как

$$\left\{\sin\frac{1}{2}t+\sin\frac{3}{2}t+\ldots+\sin(n-\frac{1}{2})t\right\}\cdot 2\sin\frac{t}{2}=1-\cos nt=2\sin^2\frac{nt}{2},$$

то

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{2\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \tag{9}$$

или

$$\sigma_n(x,f)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Phi_n(t)\,dt, \tag{10}$$

где

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \tag{11}$$

– так называемое **ядро Фейера**.

### Лемма 1.

Ядро Фейера обладает следующими свойствами:

- $\Phi_n(t)$ неотрицательно и четно на $[-\pi, \pi]$;
- для всех $n \in \mathbb{N}$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1; \tag{12}$$
- для любого $\delta \in (0, \pi)$:
$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)\,dt = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \to 0 \quad n \to \infty. \tag{13}$$

**Доказательство.** Рассмотрим ТРФ для функции $f(x) \equiv 1$. Тогда $S_n(x, f) = 1\,\forall n \in \mathbb{N}$, и следовательно, $\sigma_n(x, f) = 1\,\forall n \in \mathbb{N}$. Из интегрального представления (10) сразу следует (12).

Если $t \in [\delta, \pi]$, то

$$\Phi_n(t) \le \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2 \to 0 \quad n \to \infty. \quad \blacksquare$$

### Лемма 1.

Ядро Фейера обладает следующими свойствами:

- $\Phi_n(t)$ неотрицательно и четно на $[-\pi, \pi]$;
- для всех $n \in \mathbb{N}$
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1; \tag{12}$$
- для любого $\delta \in (0, \pi)$:
$$\int\limits_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)\,dt = \int\limits_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \to 0 \quad n \to \infty. \tag{13}$$

### Лемма 2.

$$\sigma_n(x, f) - f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,[f(x+t) - f(x)]\,dt \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

### 3.3. Теорема о равномерной сходимости средних Чезаро ТРФ.

**Теорема 7 (Фейер).**

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то равномерно на $[-\pi,\pi]$

$$\sigma_n(x,f) \rightrightarrows f(x). \tag{15}$$

**Доказательство теоремы 7.**

1) Продолжим $f(x)$ периодически на $\mathbb{R}$, тогда, так как $f(-\pi) = f(\pi)$, то это продолжение $f(x)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}$ и, кроме того, **равномерно непрерывная на** $\mathbb{R}$. Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \pi) : \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall t \in [-\delta, \delta] \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$2) \quad \sigma_n(x, f) - f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) \, [f(x+t) - f(x)] \ dt =$$

$$= \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) \, [f(x+t) - f(x)] \ dt + \int\limits_{\delta \le |t| \le \pi} \Phi_n(t) \, [f(x+t) - f(x)] \ dt \equiv I_1 + I_2.$$

$$3) \quad |I_1| \le \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) \, |f(x+t) - f(x)| \ dt \le \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) \, dt < \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) \, dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

4) $$|I_2| \le \int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} \Phi_n(t)\,|f(x+t)-f(x)|\,dt \le 2M \int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} \Phi_n(t)\,dt = 4M\int\limits_{\delta}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n \ge N$, если $N$ выбрано достаточно большим.

Итак,
$$|\sigma_n(x,f) - f(x)| < \varepsilon$$
при $n \ge N$ сразу для всех $x \in \mathbb{R}$. ■

*Замечание.* Условия теоремы 7 в определенном смысле являются **необходимыми**:
если $\sigma_n(x,f)$ для некоторой $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$ к $f(x)$, то

- $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$;
- $f(-\pi) = f(\pi)$.

**3.4. Локальная теорема Фейера.**

Итак, доказано, что для $f(x) \in C[-\pi,\pi]$: $f(-\pi) = f(\pi)$ средние Чезаро ТРФ $\sigma_n(x,f)$ **сходятся равномерно** на $[-\pi,\pi]$ к разлагаемой функции $f(x)$.

**Новый вопрос:** Как ведут себя средние Чезаро $\sigma_n(x,f)$, если $f(x)$ лишь интегрируема на $[-\pi,\pi]$ ?

## Теорема 8 (Фейер).

Пусть функция $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ и $2\pi$-периодически продолжена на $\mathbb{R}$.
Пусть в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ существуют предельные значения $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.
Тогда в этой точке $x_0$:

$$\sigma_n(x_0,f) \to \frac{1}{2}\big[f(x_0-0)+f(x_0+0)\big] \quad n\to\infty. \tag{16}$$

**Доказательство теоремы 8.**

Положим $\widetilde{f}(x_0) = \frac{1}{2}\big[f(x_0-0)+f(x_0+0)\big]$ и примем во внимание, что

- $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$: $|f(x)| \le M\ \forall x \in \mathbb{R}$;
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall t \in (0,\delta) \Rightarrow |f(x_0+t) - f(x_0+0)| < \frac{\varepsilon}{4}$;
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall t \in (-\delta,0) \Rightarrow |f(x_0+t) - f(x_0-0)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Проанализируем разность $\sigma_n(x_0,f) - \widetilde{f}(x_0)$ с помощью представления (14):

$$\sigma_n(x_0,f) - \widetilde{f}(x_0) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\left[f(x_0+t) - \widetilde{f}(x_0)\right] dt =$$

$$= \int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} \Phi_n(t)\left[f(x_0+t) - \widetilde{f}(x_0)\right] dt +$$

$$+ \int\limits_0^{\delta} \Phi_n(t) f(x_0+t)\,dt + \int\limits_{-\delta}^{0} \Phi_n(t) f(x_0+t)\,dt - \frac{1}{2}\big[f(x_0-0)+f(x_0+0)\big]\cdot 2\int\limits_0^{\delta}\Phi_n(t)\,dt =$$

$$= I_1 + \int\limits_0^{\delta} \Phi_n(t)\big[f(x_0+t) - f(x_0+0)\big]\,dt + \int\limits_{-\delta}^{0} \Phi_n(t)\big[f(x_0+t) - f(x_0-0)\big]\,dt =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Тогда

$$|I_2| \le \int\limits_0^\delta \Phi_n(t)\big|f(x_0+t)-f(x_0+0)\big|\,dt \le \frac{\varepsilon}{4}\int\limits_0^\delta \Phi_n(t)\ dt < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$|I_3| \le \int\limits_{-\delta}^0 \Phi_n(t)\big|f(x_0+t)-f(x_0-0)\big|\,dt \le \frac{\varepsilon}{4}\int\limits_{-\delta}^0 \Phi_n(t)\ dt < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$|I_1| \le \int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} \Phi_n(t)\left|f(x_0+t)-\widetilde{f}(x_0)\right|\,dt \le 4M\int\limits_\delta^\pi \Phi_n(t)\ dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } n \ge N.$$

Таким образом,

$$\left|\sigma_n(x_0,f)-\widetilde{f}(x_0)\right| < \varepsilon,$$

если $n \ge N$, где $N$ достаточно велико. ■

Итак, установлено, что:

- если $f(x) \in C[-\pi,\pi]$: $f(-\pi) = f(\pi)$, то средние Чезаро ТРФ $\sigma_n(x,f)$ **сходятся равномерно** на $[-\pi,\pi]$ к разлагаемой функции $f(x)$;
- если $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$, то в каждой точке $x = x_0$ непрерывности или разрыва 1 рода средние Чезаро ТРФ $\sigma_n(x_0,f)$ **сходятся** к числу $\frac{1}{2}\big[f(x_0-0)+f(x_0+0)\big]$.

Ответим с помощью локальной теоремы Фейера на следующий **вопрос**:

если ТРФ сходится в точке $x = x_0$, то чему равен этот предел ?

## Следствие теоремы 8.

Пусть функция $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ и $2\pi$-периодически продолжена на $\mathbb{R}$.
Пусть, кроме того, известно, что

- ТРФ функции $f(x)$ сходится в точке $x = x_0$;
- в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ либо непрерывна, либо имеет разрыв 1 рода.

Тогда ТРФ в точке $x = x_0$ сходится
либо к $f(x_0)$, либо к $\frac{1}{2}\big[f(x_0-0)+f(x_0+0)\big]$ соответственно.

**Доказательство:** $\sigma_n(x_0,f) \to \frac{1}{2}\big[f(x_0-0)+f(x_0+0)\big]$. В силу регулярности метода Чезаро $\Rightarrow$ ■

## § 4. Замкнутость тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса

Рассмотрим тригонометрическую систему функций в пространстве $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{1}$$

Для краткости любую конечную линейную комбинацию функций системы (1) будем называть **тригонометрическим многочленом**.

Тригонометрическими многочленами являются, например,

- частичные суммы ТРФ $S_n(x,f)$;
- средние Чезаро ТРФ $\sigma_n(x,f)$;
- степени тригонометрических функций $\sin^n x, \cos^n x$, $n \in \mathbb{N}$ (проверьте!);
- функции вида $P(\sin x, \cos x)$, где $P(t_1,t_2)$ – многочлен от двух переменных $t_1,t_2$ (проверьте!).

### Теорема 9.

Система (1) замкнута в пространстве $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$, т.е. для $\forall f(x) \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$:

$$\|f(x) - T(x)\| < \varepsilon. \tag{2}$$

**Доказательство теоремы 9** реализуем в три этапа.
Для $\forall f(x) \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ и $\forall \varepsilon > 0$

- построим **кусочно-постоянную функцию** $f_1(x)$ такую, что
$$\|f(x) - f_1(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}; \tag{3}$$
- построим **непрерывную на $[-\pi,\pi]$ функцию** $g(x)$ такую, что $g(-\pi) = g(\pi)$ и
$$\|f_1(x) - g(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}; \tag{4}$$
- укажем **тригонометрический многочлен** $T(x)$ такой, что
$$\|g(x) - T(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

**1.** Построение **кусочно-постоянной функции** $f_1(x)$

В силу интегрируемости функция $f(x)$ ограничена, т.е. $|f(x)| \le M \ \forall x \in [-\pi, \pi]$, и по критерию Дарбу для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ разбиение: $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \pi$ такое, что

$$0 \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) < \varepsilon_1 = \varepsilon^2/(18M), \qquad (6)$$

где $m_k = \inf\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$.

Введем кусочно-постоянную функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} m_1, & x \in [x_0, x_1], \\ m_k, & x \in (x_{k-1}, x_k] \ \ \forall k = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Тогда неравенство (6) примет вид

$$0 \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\,dx < \varepsilon_1 = \varepsilon^2/(18M). \qquad (7)$$

Из неравенства (7) следует

$$\|f(x)-f_1(x)\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))^2\,dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))\big(|f(x)|+|f_1(x)|\big)\,dx \le$$

$$\le 2M\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_1(x))\,dx < \frac{\varepsilon^2}{9}.$$

**2.** Для построения **непрерывной функции** $g(x)$ модифицируем кусочно-постоянную функцию $f_1(x)$ в точках ее разрыва, а также в точке $x = \pi$, если $f_1(\pi) \neq f_1(-\pi)$.

Пусть в некоторой окрестности точки разрыва $x = x_k$:

$$f_1(x) = \begin{cases} m_k, & x \leq x_k, \\ m_{k+1}, & x > x_k, \end{cases}$$

и $m_{k+1} \neq m_k$.

Перейдем к непрерывной функции следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} m_k, & x \leq x_k, \\ m_k + \frac{m_{k+1} - m_k}{h}(x - x_k), & x \in (x_k, x_k + h), \\ m_{k+1}, & x \geq x_k + h, \end{cases}$$

т.е. уберем разрыв, использовав линейную функцию в качестве «вставки» на интервале $(x_k, x_k + h)$ достаточно малой длины $h$.

Тогда, очевидно, получим

$$\int\limits_{x_k}^{x_k+h} |g(x) - f_1(x)|\, dx \le \frac{h}{2}\, |m_{k+1} - m_k| \le Mh,$$

а, значит, как на первом этапе доказательства,

$$\int\limits_{x_k}^{x_k+h} (g(x) - f_1(x))^2\, dx \le 2M \cdot Mh = 2M^2h.$$

Таким образом, такая модификация функции $f_1(x)$ в окрестностях точек ее разрыва приводит к неравенству

$\|g(x) - f_1(x)\|^2 \le 2nM^2h$ $\quad$ ($n$ – максимально возможное число точек разрыва)

правую часть которого можно сделать меньше $\frac{\varepsilon^2}{9}$ за счет выбора $h$.

**3.** Выбор **тригонометрического многочлена** $T(x)$ непосредственно следует из теоремы Фейера.

Действительно, для построенной функции $g(x) \in C[-\pi, \pi]$, $g(-\pi) = g(\pi)$ возьмем в качестве $T(x)$ средние Чезаро $\sigma_n(x, g)$ с достаточно большим номером $n$. Тогда неравенство

$$\|g(x) - T(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

будет следовать из того, что равномерная сходимость средних $\sigma_n(x, g)$ к $g(x)$ на $[-\pi, \pi]$ обеспечивает их сходимость в среднем. ■

**Следствия замкнутости тригонометрической системы в** $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$

**1.** Система (1) замкнута в пространстве непрерывных функций $C[-\pi, \pi]$ и в пространстве кусочно-непрерывных функций $E_0[-\pi, \pi]$.

**2.** Система (1) полна в пространствах $C[-\pi, \pi]$ и $E_0[-\pi, \pi]$.

**3.** Система

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{6}$$

полна в пространстве $E_0[0, \pi]$ и в пространстве $E_0[-\pi, 0]$.

**4.** Система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{7}$$

полна в пространстве $E_0[0, \pi]$ и в пространстве $E_0[-\pi, 0]$.

**Доказательство следствия 3.**

Пусть $f(x) \in E_0[0, \pi]$ ортогональна всем функциям системы (6), т.е.

$$\int\limits_0^\pi f(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Продолжим $f(x)$ нечетным образом на $[-\pi, 0]$ и переопределим ее, при необходимости, в точке $x = 0$, положив $f(0) = 0$. Тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и, кроме того,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\, dx = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

в силу нечетности подынтегральной функции.
Тем самым, $f(x) \in E_0[-\pi, \pi]$ ортогональна всем функциям тригонометрической системы (1) и, значит, в силу ее полноты $f(x) \equiv 0$. ■

**5.** Для коэффициентов Фурье любой функции $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ выполнено равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{8}$$

**6.** ТРФ любой функции $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ сходится к $f(x)$ в среднем.

**7.** ТРФ любой функции $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ можно почленно интегрировать по $[-\pi, \pi]$ или по любой его части.

**8.** Если две функции $f(x), g(x) \in E_0[-\pi, \pi]$ имеют одинаковые ряды Фурье, то $f(x) \equiv g(x)$.

**9.** Если ТРФ функции $f(x) \in E_0[-\pi, \pi]$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ или на какой-либо его части $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, то ТРФ сходится именно к $f(x)$.

**Доказательство следствия 9.**

Пусть $S_n(x, f) \rightrightarrows g(x) \Rightarrow \|S_n(x, f) - g(x)\| \to 0$.
Но в силу следствия 6 $\|S_n(x, f) - f(x)\| \to 0 \Rightarrow \|f(x) - g(x)\| \to 0 \Rightarrow$
$f(x) \equiv g(x)$. ■

**10. Теорема Вейерштрасса** о равномерном приближении непрерывных функций многочленами

## Теорема 10.

Для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $P(x)$ такой, что

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]. \tag{9}$$

**Замечание.**

Текущее изложение – следствие результатов Л.Фейера (1904).

К.Вейерштрасс (1885) – первым доказал эту теорему как следствие своих исследований специального интегрального преобразования.

С.Н.Бернштейн (1912) предложил конструктивное построение аппроксимирующего многочлена $P(x)$.

**Доказательство.**

Выполним линейное преобразование аргумента $x$ по формуле: $x = a + \frac{b-a}{\pi}t$.
Тогда $f(x) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}t\right) \equiv g(t)$, причем новая функция $g(t)$ будет непрерывной на $[0, \pi]$.
Продолжим функцию $g(t)$ четным образом на $[-\pi, 0]$. Тогда

$$g(t) \in C[-\pi, \pi], \quad g(-\pi) = g(\pi).$$

Как и в доказательстве теоремы 9, возьмем средние Чезаро $T(t) = \sigma_n(t, g)$ с настолько большим номером $n$, чтобы

$$|g(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [-\pi, \pi]. \tag{10}$$

Теперь, в свою очередь, тригонометрический многочлен $T(t)$ разложим в сходящийся при всех $t \in \mathbb{R}$ ряд Тейлора и выберем его частичную сумму $Q_n(t)$ так, чтобы

$$|T(t) - Q_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [-\pi, \pi]. \tag{11}$$

Тогда

$$|g(t) - Q_n(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

или, в терминах исходной переменной $x$,

$$\left| f(x) - Q_n\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]. \tag{12}$$

Последнее неравенство совпадает с требуемым неравенством (9), так как $P(x) = Q_n\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$ – многочлен. ■

Изучение **сходимости** самого тригонометрического ряда Фурье

**– равномерной и в каждой точке –**

продолжим на следующей лекции.

# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 4)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

08 апреля 2020 г.

## § 4. Замкнутость тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса
(окончание)

Итак, для ТРФ для функции $f(x)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

показано, что если $f(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$, в котором норма (полунорма) задается

$$\|f\|_2 = \left( \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \right)^{1/2}, \tag{2}$$

то ТРФ (1) сходится к $f(x)$ в среднем, т.е. его **частичные суммы** $S_n(x, f)$ **сходятся к** $f(x)$ **по норме** (2):

$$\|S_n(x, f) - f(x)\|_2 \to 0 \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Можно доказать, что для нормы

$$\|f\|_p = \left( \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}, \quad p > 1, \tag{4}$$

справедлив такой же **согласованный** результат:

$$\|S_n(x, f) - f(x)\|_p \to 0 \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Отметим, что сходимость ТРФ в среднем (3) вовсе не означает его сходимости даже в какой-либо точке на $[-\pi, \pi]$.

**Так что вопрос о сходимости ТРФ в точке и на множестве пока остается открытым.**

Попробуем сформулировать аналогичный **согласованный** «результат», используя другую норму.

Рассмотрим все непрерывные функции $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, которые таковы, что $f(-\pi) = f(\pi)$. Они образуют бесконечномерное линейное пространство – обозначим его $C_*[-\pi, \pi]$. Введем

$$\|f(x)\|_* = \max_{x \in [-\pi,\pi]} |f(x)|. \tag{6}$$

Нам известно, что при $n \to \infty$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_* \to 0 \iff f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на } [-\pi, \pi],$$

и можно показать, что (6) задает норму в пространстве $C_*[-\pi, \pi]$.

Имеет ли место в данном случае такая же **согласованность** сходимости ТРФ, т.е. если $f(x) \in C_*[-\pi,\pi]$, то **верно ли**:

$$\|S_n(x,f) - f(x)\|_* \to 0 \iff S_n(x,f) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на } [-\pi,\pi]. \tag{7}$$

Результат (7) нами не был доказан. Равномерная сходимость была доказана лишь для **средних Чезаро** (теорема Фейера):

$$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x,f) \Rightarrow \|\sigma_n(x,f) - f(x)\|_* \to 0.$$

Оказывается, что доказать для любой непрерывной функции $f(x)$ равномерную сходимость ТРФ (и даже сходимость ТРФ в какой-либо точке) **принципиально невозможно**.

- [*Дюбуа-Реймон, 1876*] $\exists f(x) \in C_*[-\pi, \pi]$: ее ТРФ **расходится** на множестве точек, всюду плотно покрывающем $[-\pi, \pi]$;
- [*Лебег, 1909*] причина – в свойствах ядра Дирихле $D_n(t)$:

$$S_n(x, f) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt.$$

В отличие от ядра Фейера $\Phi_n(t)$, порождающего по той же формуле средние Чезаро:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\, dt = 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\Phi_n(t)|\, dt = 1, \quad \text{так как } \Phi_n(t) \geq 0,$$

для ядра Дирихле

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1, \quad \text{но} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n.$$

У вопроса сходимости ТРФ в точках $[-\pi, \pi]$ своя история.

- [*Колмогоров, 1926*] $\exists f(x)$, допускающая существование понимаемого в смысле Лебега интеграла
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx < \infty,$$
для которой ТРФ **расходится в каждой точке** $[-\pi, \pi]$;
- [*Карлесон, 1966*] для любой $f(x)$, допускающей существование интеграла
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty,$$

ее ТРФ **сходится почти всюду** на $[-\pi, \pi]$.

**Вывод**

Для того, чтобы ТРФ функции $f(x)$ сходился равномерно или в точке, от функции $f(x)$ **необходимо требовать большего, чем просто ее непрерывность** на $[-\pi, \pi]$.

## § 5. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ

*Опр.* Функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ **кусочно-непрерывную производную**, если

- $f'(x)$ существует и непрерывна на всем $(a, b)$, кроме, быть может, конечного числа точек $x_k \in (a, b)$, в которых существуют $f'(x_k \pm 0)$,
- существуют $f'(a + 0)$ и $f'(b - 0)$.

Считаем, что в каждой точке $x_k$:

$$f'(x_k) = \frac{1}{2}\Big(f'(x_k + 0) + f'(x_k - 0)\Big).$$

**Примеры:**

**1.** Функция $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$

- $f'(x)$ существует и непрерывна для всех $x \neq 0$; $f'(-1+0) = -1$, $f'(1-0) = 1$;
- в точке $x_1 = 0$: существуют $f'(0-0) = -1$, $f'(0+0) = 1$.

Таким образом, $f'(x) = \text{sgn}(x)$ на $[-1, 1]$.

**2.** Функция $f(x) = \{x\}$ на $[0, 2]$ (дробная часть числа)

- $f'(x)$ существует и непрерывна для всех $x \neq 1$; $f'(0+0) = 1$, $f'(2-0) = 1$;
- в точке $x_1 = 1$: существуют $f'(1-0) = 1$, $f'(1+0) = 1$.

Таким образом, $f'(x) = 1$ на $[0, 2]$.

**Теорема 11.**

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и $f(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на $[-\pi, \pi]$.
Тогда ТРФ для $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[-\pi, \pi]$, причем эта сходимость абсолютная, т.е. ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n \cos nx| + |b_n \sin nx|) \tag{8}$$

равномерно сходится на $[-\pi, \pi]$.

**Доказательство.**

Достаточно доказать равномерную сходимость только ряда (8):
– из этого будет следовать равномерная сходимость самого ТРФ,
– а значит, сходится ТРФ будет именно к разлагаемой функции $f(x)$ (см. §4).

Воспользуемся признаком Вейерштрасса, т.е. докажем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \,. \tag{9}$$

Рассмотрим коэффициенты Фурье:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx.$$

Тогда, если $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1}$ – точки разрыва $f'(x)$, а также $x_0 = -\pi$, $x_m = \pi$, то

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \cos nx\, df(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\left\{ f(x_k)\cos nx_k - f(x_{k-1})\cos nx_{k-1} + n\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\sin nx\, dx \right\} =$$

$$= \frac{n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx +$$

$$+ \Big\{ f(x_1)\cos nx_1 - f(x_0)\cos nx_0 + f(x_2)\cos nx_2 - f(x_1)\cos nx_1 + \ldots$$

$$\ldots + f(x_m)\cos nx_m - f(x_{m-1})\cos nx_{m-1} \Big\} = nb_n - f(-\pi)\cos n\pi + f(\pi)\cos n\pi = nb_n.$$

Аналогично,

$$\beta_n = -na_n.$$

Итак, получим следующее:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\alpha_n|}{n}+\frac{|\beta_n|}{n}\right)\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}|\alpha_n|^2+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2}|\beta_n|^2+\frac{1}{2n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\alpha_n|^2+|\beta_n|^2\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

в силу числового неравенства $2xy\leq x^2+y^2$ и неравенства Бесселя. ■

**Почленное дифференцирование ТРФ**

### Теорема 12.

Пусть функции $f(x), f'(x), \ldots, f^{(m)}(x)$ непрерывны на $[-\pi, \pi]$ и $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$ для всех $k = 0, 1, \ldots, m$.
Пусть также $f^{(m)}(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на $[-\pi, \pi]$.
Тогда ТРФ для $f(x)$ можно $m$ раз почленно дифференцировать на $[-\pi, \pi]$.

**Доказательство.**

Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \,.$$

Выполним формальное почленное дифференцирование этого ряда

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^k \left( a_n \cos(nx - \frac{\pi k}{2}) + b_n \sin(nx - \frac{\pi k}{2}) \right), \quad k = 1, \ldots, m,$$

и докажем, что при $k = m$ этот ряд равномерно сходится на $[-\pi, \pi]$, так как мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m \left( |a_n| + |b_n| \right) . \tag{10}$$

По известной теореме это и позволит обосновать возможность почленного дифференцирования.

Пусть $\alpha_n$ и $\beta_n$ – коэффициенты Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\cos nx\,dx, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\sin nx\,dx.$$

Тогда, проводя $(m+1)$ раз интегрирование по частям в этих интегралах, получим соотношение:

$$|\alpha_n| + |\beta_n| = n^{m+1}\big(|a_n| + |b_n|\big),$$

а, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m\left(|a_n| + |b_n|\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\alpha_n|}{n} + \frac{|\beta_n|}{n}\right) < \infty,$$

как в доказательстве предыдущей теоремы. ■

**Оценка скорости сходимости ТРФ**

### Теорема 13.

Пусть выполнены все условия теоремы 11.
Тогда справедлива оценка

$$|S_n(x,f) - f(x)| \le \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} \quad \forall x \in [-\pi, \pi], \tag{11}$$

где $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

**Доказательство.**

Используем известное неравенство Коши-Буняковского для сумм

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n d_n| \le \left(\sum_{n=1}^{N} c_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} d_n^2\right)^{1/2},$$

из которой следует, что если при $N \to \infty$ ряды в правой части сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n d_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2\right)^{1/2}.$$

Проведем теперь необходимую оценку

$$|S_n(x,f) - f(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}\right) \le$$

$$\le \left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k^2\right)^{1/2}\right] \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \equiv \gamma_n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}.$$

Теперь, в силу монотонного убывания функции $y = x^{-2}$ на $(0, +\infty)$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^{k} dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2} = \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$|S_n(x, f) - f(x)| \leq \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \quad \blacksquare$$

## § 6. Уточнение условий сходимости ТРФ. Принцип локализации

## 1. Свойства коэффициентов Фурье

Было доказано, что если $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, то ее коэффициенты Фурье $a_n$ и $b_n$:

$$a_n, b_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Установим аналогичное свойство для **функций двух переменных** $F(x, t)$.

Рассмотрим функцию $F(x, t) = f(x + t)g(t)$, где

- $f(t)$ – $2\pi$-периодическая функция, интегрируемая на $[-\pi, \pi]$;
- функция $g(t)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$,

и ее коэффициенты Фурье

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x, t) \cos nt \, dt, \quad b_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x, t) \sin nt \, dt. \qquad (12)$$

**Лемма 1.**

1) Функция $I(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x,t)\,dt$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$ (и на $\mathbb{R}$).

2) Коэффициенты Фурье $a_n(x), b_n(x)$ равномерно стремятся к нулю на $[-\pi,\pi]$.

**Доказательство.**

1) Рассмотрим разность

$$I(x+h) - I(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x+h+t) - f(x+t))g(t)\,dt.$$

Тогда

$$|I(x+h)-I(x)| \leq M \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+h+t)-f(x+t)|\,dt = M \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+h)-f(t)|\,dt. \quad (13)$$

Приблизим $f(t)$ тригонометрическим многочленом $T(t)$ по норме $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$:

$$\|f(t) - T(t)\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|^2 \, dt < \frac{\varepsilon^2}{18\pi M^2}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)| \, dt \leq \|f(t) - T(t)\| \cdot \sqrt{2\pi} < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Оценим теперь правую часть (13):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+h) - f(t)| \, dt \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t+h) - T(t+h)| \, dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(t+h) - T(t)| \, dt +$$

$$+ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(t) - f(t)| \, dt < \frac{2\varepsilon}{3M} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |T(t+h) - T(t)| \, dt.$$

Последний интеграл можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{3M}$ за счет выбора $\delta > 0$ и рассмотрения любых $h : |h| < \delta$ в силу равномерной непрерывности $T(t)$ на $\mathbb{R}$.

2. Выпишем для $F(x,t)$ равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2(x)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2(x)+b_n^2(x)\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F^2(x,t)\,dt. \tag{14}$$

- Функции

$$a_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,g(t)\cos nt\,dt,\quad b_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,g(t)\sin nt\,dt,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}F^2(x,t)\,dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x+t)g^2(t)\,dt$$

  непрерывны по переменной $x\in[-\pi,\pi]$.
- Слагаемые левой части неотрицательны.

[*По признаку Дини*] Функциональный ряд в (14) сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$

$$a_n(x),b_n(x)\rightrightarrows 0 \quad \text{на } [-\pi,\pi] \qquad \blacksquare$$

**2. Выделение главной части частичных сумм ТРФ**

Рассмотрим

$$S_n(x,f) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt, \quad D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi \sin\frac{t}{2}}.$$

Тогда при $\forall \delta \in (0,\pi)$:

$$S_n(x,f) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t) D_n(t)\, dt + \int\limits_{\delta \le |t| \le \pi} f(x+t) \frac{1}{2\pi \sin\frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t) D_n(t)\, dt \; + \; r_n(x).$$

Тогда

$$r_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin(n+\frac{1}{2})t\,dt,$$

где

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}, & \text{если } \delta \le |t| \le \pi, \\ 0, & \text{если } -\delta < t < \delta, \end{cases}$$

интегрируема на $[-\pi, \pi]$.

Следовательно,

$$r_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot g(t) \cos\frac{t}{2} \cdot \sin nt\,dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot g(t) \sin\frac{t}{2} \cdot \cos nt\,dt \rightrightarrows 0$$

при $n \to \infty$ равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Аналогично

$$S_n(x,f) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] D_n(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_n(t)\,dt + r_n(x) - f(x) \int\limits_{\delta \le |t| \le \pi} D_n(t)\,dt.$$

Здесь $r_n(x) \rightrightarrows 0$ и

$$\left| f(x) \int\limits_{\delta \le |t| \le \pi} D_n(t)\,dt \right| \le M \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot g(t) \sin(n + \frac{1}{2}) t\,dt \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Значит, и последнее слагаемое стремится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$.

**Лемма 2.**
Для любого $\delta \in (0, \pi)$ и любой константы $A$ справедливы представления

$$S_n(x, f) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t) D_n(t)\, dt \, + \, r_n(x), \quad r_n(x) \rightrightarrows 0,$$

$$S_n(x, f) - f(x) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_n(t)\, dt \, + \, R_n(x), \quad R_n(x) \rightrightarrows 0,$$

$$S_n(x_0, f) - A = \int\limits_{-\delta}^{\delta} [f(x_0+t) - A] D_n(t)\, dt \, + \, \widetilde{R}_n, \quad \widetilde{R}_n \to 0. \quad \blacksquare$$

**Анализ полученных представлений**

## Теорема 14.

**(Принцип локализации Римана)**
Сходимость или расходимость ТРФ заданной интегрируемой функции $f(x)$ в данной точке (на данном множестве) зависит лишь от поведения $f(x)$ **в сколь угодно малой окрестности** этой точки (этого множества).

## Теорема 15.

**(Уточненный принцип локализации Римана)**
Если $2\pi$-периодическая и интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ **тождественно равна нулю на** $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, то для любого достаточно малого $\delta > 0$ ТРФ функции $f(x)$ **равномерно сходится к нулю на** $[a + \delta, b - \delta]$:

$$S_n(x, f) \rightrightarrows f(x) \equiv 0 \quad \text{на } [a + \delta, b - \delta].$$

Уточнение условий **сходимости** тригонометрического ряда Фурье

**– равномерной и в каждой точке –**

продолжим на следующей лекции.

# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 5)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

15 апреля 2020 г.

## § 7. Уточнение условий сходимости ТРФ. Классы Гёльдера

### 7.1. Функциональные классы Гёльдера

Полученные в §5 простейшие условия сходимости ТРФ в точке и на множестве требовали наличия у разлагаемой функции $f(x)$ производной $f'(x)$ во всех точках, кроме, быть может, конечного их числа, где $f'(x)$ имеет разрывы первого рода.

Например, непрерывная функция $f(x) = \sqrt{|x|}$ на $[-\pi, \pi]$ к таковым не относится, так как $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \infty$.

Расширим рассматриваемое множество функций $f(x)$.

Пусть $f(x) \in C[a,b]$. Введем для нее **модуль непрерывности** $\omega(\delta, f)$ – для $\forall\delta > 0$ положим

$$\omega(\delta, f) = \sup_{x, x+t\in[a,b],\ |t|\le\delta} |f(x+t) - f(x)|. \tag{1}$$

$$\omega(\delta, f) = \sup_{x, x+t \in [a,b],\ |t| \le \delta} |f(x+t) - f(x)|. \qquad (1)$$

**Свойства модуля непрерывности**

**1.** Точная верхняя грань в (1) достигается [*теорема Вейерштрасса*]

**2.** Если $\delta_1 < \delta_2$, то $\omega(\delta_1, f) \le \omega(\delta_2, f)$

**3.** При $\delta \to 0+0$ выполнено $\omega(\delta, f) \to 0$ [*теорема Кантора*]

**4.** Если $f(x)$ дифференцируема и $f'(x)$ ограничена, то с некоторой константой $M > 0$

$$\omega(\delta, f) \le M\delta \qquad \forall \delta > 0 \qquad (2)$$

[*По теореме Лагранжа*

$$f(x+t) - f(x) = f'(\xi)t \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| \le M|t|\ ]$$

**Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ на $[0, 1]$.

Ее производная $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ не ограничена при $x \to 0 + 0$.

Однако для $\forall t > 0, x \geq 0$:

$$(x+t)^\alpha - x^\alpha = t^\alpha \Big( (\frac{x}{t} + 1)^\alpha - (\frac{x}{t})^\alpha \Big).$$

Отметим, что функция $\varphi(h) = (h+1)^\alpha - h^\alpha$ убывает на $[0, +\infty)$, так как

$$\varphi'(h) = \alpha \Big( (h+1)^{\alpha-1} - h^{\alpha-1} \Big) < 0.$$

Следовательно, $\varphi(h) \leq \varphi(0) = 1$

$$\Rightarrow 0 < (x+t)^\alpha - x^\alpha \leq t^\alpha \qquad \forall t > 0,$$

причем при $x = 0$ разность $(x+t)^\alpha - x^\alpha = t^\alpha$.
Аналогично для $\forall t < 0$:

$$0 < x^\alpha - (x+t)^\alpha \leq (-t)^\alpha.$$

Итак, для рассматриваемой функции $f(x)$ модуль непрерывности вычисляется по формуле

$$\omega(\delta, f) = \delta^\alpha \qquad \forall \delta > 0.$$

*Опр.* Функция $f(x)$ **удовлетворяет** на $[a,b]$ **условию Гёльдера с показателем** $\alpha \in (0,1]$, если с некоторой константой $M > 0$ выполнена оценка

$$\omega(\delta, f) \leq M\delta^{\alpha} \qquad \forall \delta > 0. \tag{3}$$

*Обозначение:* $f(x) \in C^{\alpha}[a,b]$.

*Замечания.*

1. Отметим, что для $f(x) \in C^{\alpha}[a,b]$ выполнено неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|^{\alpha} \qquad \forall x, x+t \in [a,b].$$

2. В случае $\alpha = 1$ условие (3) называют условием Липшица.
3. Если $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ таковы, что $\alpha_1 < \alpha_2$, то $C^{\alpha_2}[a,b] \subset C^{\alpha_1}[a,b]$.

**7.2. Равномерная сходимость ТРФ для функций из классов Гёльдера**

## Теорема 16.

Пусть $f(x) \in C^{\alpha}[-\pi, \pi]$, $0 < \alpha \le 1$, и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ТРФ функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[-\pi, \pi]$.

**Доказательство.** Продолжим $f(x)$ $(2\pi)$-периодически на $\mathbb{R}$. Воспользуемся леммой 2:

$$S_n(x, f) - f(x) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_n(t)\, dt \;+\; R_n(x), \tag{4}$$

где $R_n(x) \rightrightarrows 0$ на $[-\pi, \pi]$.
Добавим оценку первого интеграла в (4):

$$\left| \int\limits_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_n(t)\, dt \right| \le \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \cdot |D_n(t)|\, dt \le$$

$$\le M \int\limits_{-\delta}^{\delta} |t|^{\alpha} \cdot \frac{1}{2\pi |\sin(t/2)|}\, dt = \frac{M}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} \frac{t^{\alpha}}{\sin(t/2)}\, dt.$$

Так как $\sin(t/2) \geq \frac{t}{\pi}$ при $t \in (0, \pi]$, то

$$\left| \int\limits_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_n(t)\, dt \right| \leq M \int\limits_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}\, dt = \frac{M}{\alpha}\, \delta^{\alpha}.$$

Окончательно, для $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{M}{\alpha}\, \delta^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и далее выберем $N$ так, чтобы $\forall n \geq N$ и $\forall x \in [-\pi, \pi]$

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad |S_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \qquad \blacksquare$$

Объединяя результат теоремы 16 и принцип локализации Римана, получим

### Теорема 17.

Пусть $(2\pi)$-периодическая функция $f(x)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Пусть, кроме того, для некоторого $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$: $f(x) \in C^{\alpha}[a, b]$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда для любого $\delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ ТРФ функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[a + \delta, b - \delta]$.

### 7.3. Сходимость ТРФ в точке

*Опр.* Функция $f(x)$ **удовлетворяет в точке $x_0$ справа [слева] условию Гёльдера с показателем** $\alpha \in (0,1]$, если

- существует $f(x_0+0)$ $[f(x_0-0)]$;
- для любого достаточно малого $\delta > 0$ выполнено

$$\begin{gathered} |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le M\, t^{\alpha} \quad \forall t \in (0,\delta) \\ \big[\, |f(x_0-t) - f(x_0-0)| \le M\, t^{\alpha} \quad \forall t \in (0,\delta)\, \big] \end{gathered} \tag{5}$$

*Замечание 1.* Если $f(x) \in C^{\alpha_1}[a,x_0) \cap C^{\alpha_2}(x_0,b]$, то $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера в точке $x_0$ слева с показателем $\alpha_1$ и справа с показателем $\alpha_2$.

*Замечание 2.* Если $f(x)$ имеет в точке $x_0$ правую [левую] производную, то $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера в точке $x_0$ справа [слева] с показателем $\alpha = 1$.

**Теорема 18.**

Пусть $(2\pi)$-периодическая и интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ в некоторой точке $x_0$:

- удовлетворяет условию Гёльдера справа с показателем $\alpha_1 \in (0, 1]$,
- удовлетворяет условию Гёльдера слева с показателем $\alpha_2 \in (0, 1]$.

Тогда ТРФ функции $f(x)$ сходится в точке $x_0$ к значению

$$\widetilde{f}(x_0) = \frac{1}{2}\big[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\big].$$

**Доказательство.** По условию

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)| \le M_1\, t^{\alpha_1} \quad \forall t \in (0,\delta_1),$$
$$|f(x_0+t)-f(x_0-0)| \le M_2\, (-t)^{\alpha_2} \quad \forall t \in (-\delta_2,0).$$

Тогда, если $M=\max(M_1,M_2)$, $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$, $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, то

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)| \le M\, t^{\alpha} \quad \forall t \in (0,\delta),$$
$$|f(x_0+t)-f(x_0-0)| \le M\, (-t)^{\alpha} \quad \forall t \in (-\delta,0).$$

В силу представления из леммы 2 ($\widetilde{R}_n \to 0$):

$$S_n(x_0,f)-\widetilde{f}(x_0) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \big[f(x_0+t)-\widetilde{f}(x_0)\big] D_n(t)\,dt \,+\, \widetilde{R}_n =$$

$$= \int\limits_{0}^{\delta} f(x_0+t) D_n(t)\,dt + \int\limits_{-\delta}^{0} f(x_0+t) D_n(t)\,dt - \int\limits_{0}^{\delta} f(x_0+0) D_n(t)\,dt - \int\limits_{-\delta}^{0} f(x_0-0) D_n(t)\,dt +$$

$$+\widetilde{R}_n = \int\limits_{0}^{\delta} \big[f(x_0+t)-f(x_0+0)\big] D_n(t)\,dt + \int\limits_{-\delta}^{0} \big[f(x_0+t)-f(x_0-0)\big] D_n(t)\,dt + \widetilde{R}_n.$$

Далее завершение рассуждения такое же, как в предыдущей теореме:

$$\left|\int_0^\delta [f(x_0+t)-f(x_0+0)]\,D_n(t)\,dt\right| \leq \int_0^\delta Mt^\alpha \frac{dt}{2\pi|\sin(t/2)|} \leq \frac{M}{2}\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M}{2\alpha}\delta^\alpha;$$

$$\left|\int_{-\delta}^0 [f(x_0+t)-f(x_0-0)]\,D_n(t)\,dt\right| \leq \int_{-\delta}^0 M|t|^\alpha \frac{dt}{2\pi|\sin(t/2)|} \leq \frac{M}{2}\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt = \frac{M}{2\alpha}\delta^\alpha;$$

$$\widetilde{R}_n \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Таким образом, для $\forall\varepsilon > 0$ сначала выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{M}{\alpha}\,\delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем $N$ так, чтобы $\forall n \geq N$

$$|\widetilde{R}_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $n \geq N$

$$|S_n(x_0, f) - \widetilde{f}(x_0)| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

## 7.4. Примеры и заключительные замечания

### I. Пример одного ТРФ и связанные с ним результаты.

Построим разложение в ТРФ функции $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$. Из общей теории следует, что

- в этом разложении коэффициенты $a_n = 0 \; \forall n$,
- ряд сходится в любой внутренней точке $[-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$,
- в точках $-\pi$ и $\pi$ ряд сходится к нулю,
- ряд можно почленно интегрировать на любом интервале из $[-\pi, \pi]$.

**а)** Коэффициенты Фурье функции $f(x) = x$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0 \qquad \forall n,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{-1}{\pi n}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

ТРФ имеет вид

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sin nx}{n} \qquad \forall x \in (-\pi, \pi). \tag{6}$$

**б)** Запишем ТРФ (6) для некоторых частных значений переменной $x$:

$$x = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}; \tag{7}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} = \frac{\pi}{4}$$

Так как $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ при $n = 2k$ и $\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^k$ при $n = 2k+1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}. \tag{8}$$

**в)** Равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right)^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{[Эйлер, 1735]} \tag{9}$$

**г)** Проинтегрируем ряд (6) почленно по отрезку $0 \le x \le y$ для каждого $y \in (0, \pi]$:

$$\int\limits_0^y x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \int\limits_0^y \sin nx\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(\cos ny - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos ny. \qquad (10)$$

В частности, при $y = \pi$ получим

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}((-1)^n - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad (11)$$

Вычислим числовой ряд в разложении (10):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Итак, окончательно

$$\frac{y^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos ny, \qquad -\pi \leq y \leq \pi. \tag{12}$$

Отметим, что в силу теоремы единственности ряд (12) является ТРФ функции $g(y) = \frac{y^2}{4}$ с коэффициентами

$$A_0 = \frac{\pi^2}{6}, \;\; A_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \; n \geq 1, \quad B_n = 0 \quad \forall n.$$

Равенство Парсеваля для ряда (12) приводит к тождеству:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y^4}{16}\, dy = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi^4}{80} = \frac{\pi^4}{72} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \tag{13}$$

**II. ТРФ на произвольном интервале.**

Пусть требуется разложить в ТРФ функцию $f(x)$, заданную на произвольном интервале $[-l,l]$, где $l>0$. Это можно сделать, выполнив замену $x=\frac{l}{\pi}t:\ [-\pi,\pi]\to[-l,l]$. Тогда ТРФ для функции $f(\frac{l}{\pi}t)$ на $[-\pi,\pi]$ перейдет в искомое разложение для $f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{14}$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\big(\frac{l}{\pi}t\big)\cos nt\,dt=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\big(\frac{l}{\pi}t\big)\sin nt\,dt=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

**III. Комплексная форма записи ТРФ.**

Рассмотрим на $-\pi \le x \le \pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Преобразуем его, учитывая следующее соотношение

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{\pi}\left(\cos nx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt + \sin nx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(x-t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[e^{-in(x-t)} + e^{in(x-t)}\right]\, dt =$$

$$= e^{-inx} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int}\, dt + e^{inx} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt \equiv c_{-n} e^{-inx} + c_n e^{inx}.$$

Если дополнительно принять $c_0 = \frac{1}{2} a_0$, то получим

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \qquad (15)$$

На этом мы завершаем изучение основ теории рядов Фурье.

**Литература:**

**1.** В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ, т.2. – Глава 8.

**2.** В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Основы математического анализа, т.2. – Глава 10.

**Дополнительная литература:**

**3.** Н.К.Бари. Тригонометрические ряды. М., 1961.

**4.** А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, в 2 т. М., 1965.

На следующей лекции мы познакомимся с разложением функций в **интеграл Фурье**

На этом мы завершаем изучение основ теории рядов Фурье.

**Литература:**

**1.** В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ, т.2. – Глава 8.

**2.** В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Основы математического анализа, т.2. – Глава 10.

**Дополнительная литература:**

**3.** Н.К.Бари. Тригонометрические ряды. М., 1961.

**4.** А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, в 2 т. М., 1965.

На следующей лекции мы познакомимся с разложением функций в **интеграл Фурье**

# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 6)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

22 апреля 2020 г.

## § 8. Интеграл Фурье

### 8.1. Формальный переход от рядов Фурье

Пусть функция $f(x)$ задана на $\mathbb{R}$ и на каждом $[-l,l]$ допускает разложение в ТРФ:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\,d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\cos\frac{\pi n}{l}x\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi+\frac{1}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\,d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}(\xi-x)\,d\xi=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}(\xi-x)\,d\xi.\qquad(1)$$

Рассмотрим частичную сумму ряда (1)

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} (\xi - x)\, d\xi \tag{2}$$

и будем при этом считать, что $l$ меняется (растет) согласованно с ростом $N$ по правилу

$$l^2 = N\pi.$$

Тогда выполним следующие замены $\dfrac{1}{2l} = \dfrac{l}{2\pi N}$, $\dfrac{\pi}{l} = \dfrac{l}{N}$, в результате чего получим

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{l}{2\pi N} \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \frac{ln}{N} (\xi - x)\, d\xi. \tag{3}$$

Коэффициенты $\dfrac{ln}{N}$ в (3) разбивают $[-l, l]$ на равные части, каждая длины $\dfrac{l}{N}$:

$$-l < -l + \frac{l}{N} < -l + \frac{2l}{N} < \ldots < l - \frac{l}{N} < l,$$

поэтому (3) *является интегральной суммой* для следующего интеграла

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos u(\xi - x)\, d\xi\, du. \tag{4}$$

При $l \to +\infty$ этот интеграл

$$\int_{-l}^{l} \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos u(\xi - x)\, d\xi\, du \tag{4}$$

*переходит в несобственный интеграл* и, так как при этом $N \to \infty$, *получится равенство:*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos u(\xi - x)\, d\xi \tag{5}$$

или, в другом виде,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[a(u) \cos ux + b(u) \sin ux\right] du, \tag{6}$$

где

$$a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \xi u\, d\xi, \quad b(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \xi u\, d\xi.$$

Формула (6) называется **интегральной формулой Фурье**.

### 8.2. Преобразование Фурье и его свойства

Будем рассматривать функции $f(x)$, заданные на $\mathbb{R}$, интегрируемые по Риману на $\forall[a,b] \subset \mathbb{R}$ и для которых сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

*Обозначение:* $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

*Опр.* Функция

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy}\,dx \tag{7}$$

называется **преобразованием Фурье** (**образом Фурье**) функции $f(x)$.

*Замечание.* Будем использовать экспоненциальную форму записи, объединяющую обозначения формулы (6)

$$a(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx, \quad b(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin xy\,dx,$$

которые принято называть **косинус-** и **синус-преобразованиями Фурье**.

**Теорема 19.**

Пусть функция $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда

- ее образ Фурье $\widehat{f}(y)$ определен для $\forall y \in \mathbb{R}$,
- функция $\widehat{f}(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$,
- выполнено равенство

$$\lim_{|y|\to\infty} \widehat{f}(y) = 0.$$

**Доказательство.**

1) Так как $|f(x)e^{ixy}| = |f(x)|$, то $\widehat{f}(y)$ определена для $\forall y \in \mathbb{R}$ и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}\, dx$$

равномерно сходится на $\mathbb{R}$ (признак Вейерштрасса).

2) Рассмотрим

$$I_n(y) = \int_{-n}^{n} f(x)e^{ixy}\, dx. \tag{8}$$

Тогда

$$|I_n(y_0+h)-I_n(y_0)| \le \int_{-n}^{n} |f(x)|\cdot\left|e^{ix(y_0+h)}-e^{ixy_0}\right| dx = \int_{-n}^{n} |f(x)|\cdot\left|e^{ixh}-1\right| dx \le^{*}$$

$$\le \int_{-n}^{n} |f(x)| \cdot |xh|\, dx \le nh \int_{-n}^{n} |f(x)|\, dx \le nh \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

$\left[ {}^{*}\ |e^{it} - 1| = 2|\sin(t/2)| \le |t| \right]$

Таким образом, $I_n(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ для каждого $n$. Так как $I_n(y) \rightrightarrows \widehat{f}(y)$, то $\widehat{f}(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

3) Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и выберем $A > 0$:

$$\int\limits_{|x| \geq A} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3} \tag{9}$$

$$\Rightarrow |\widehat{f}(y)| \leq \left| \int\limits_{-A}^{A} f(x) e^{ixy}\,dx \right| + \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Далее рассмотрим разбиение $[-A, A]$: $-A = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = A$, для которого верхняя сумма Дарбу $S$ удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq S - \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если рассмотреть кусочно-постоянную функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} M_1 & \text{при } x \in [x_0, x_1], \\ M_k & \text{при } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 2, \dots, n, \end{cases}$$

где $M_k = \sup\limits_{x \in (x_{k-1}, x_k)} f(x)$, то

$$S = \int\limits_{-A}^{A} f_1(x)\, dx$$

$$\int\limits_{-A}^{A} |f_1(x) - f(x)|\, dx = \int\limits_{-A}^{A} (f_1(x) - f(x))\, dx = S - \int\limits_{-A}^{A} f(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{-A}^{A} f(x)e^{ixy}\,dx\right| \le \left|\int\limits_{-A}^{A} f_1(x)e^{ixy}\,dx\right| + \int\limits_{-A}^{A} |f_1(x) - f(x)|\,dx <$$

$$< \left|\sum_{k=1}^{n} M_k \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| + \frac{\varepsilon}{3} \le \sum_{k=1}^{n} |M_k| \cdot \left|\frac{e^{ix_k y} - e^{ix_{k-1} y}}{iy}\right| + \frac{\varepsilon}{3} \le$$

$$\le \frac{2}{|y|} \sum_{k=1}^{n} |M_k| + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3},$$

если

$$|y| \ge \frac{6}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} |M_k|. \tag{10}$$

Итак, окончательно, для $\forall y$, удовлетворяющих (10), выполнено

$$|\widehat{f}(y)| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

### Следствие из теоремы 19.

Утверждения теоремы 19 справедливы для косинус- и синус-преобразований Фурье:

$$a(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx, \quad b(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin xy\,dx.$$

## 8.3. Разложение функции в интеграл Фурье

Итак, отображение (линейное!)

$$f(x) \mapsto \widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy}\, dx$$

корректно определено на $L_1(\mathbb{R})$.
*Вопрос:* обладает ли оно обратным, т.е. можно ли по $\widehat{f}(y)$ восстановить $f(x)$ ?

Укажем класс функций, на которых преобразование Фурье обратимо (т.е. существует **обратное преобразование Фурье**), и построим формулу для обратного отображения (ее называют **разложением функции $f(x)$ в интеграл Фурье**).

*Опр.* **Разложением функции $f(x)$ в интеграл Фурье** называют следующий несобственный интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{-ixy}\, dy \equiv \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \to +\infty} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \widehat{f}(y) e^{-ixy}\, dy. \tag{11}$$

**Теорема 20.**

Пусть $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ и в некоторой точке $x \in \mathbb{R}$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера слева и справа с показателем $\alpha \in (0,1]$. Тогда $f(x)$ разложима в этой точке в интеграл Фурье и справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi} \mathrm{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{-ixy}\, dy = \frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big). \tag{12}$$

**Доказательство.**

1) Так как $\widehat{f}(y)$ непрерывна, то $\forall \lambda > 0$ существует

$$\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy = \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iuy}\, du\, dy.$$

Покажем, что здесь можно поменять порядок интегрирования.

В силу равномерной сходимости интеграла для $\widehat{f}(y)$
для $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 > 0 :\ \forall A \geq A_0$ и $\forall y \in [-\lambda, \lambda]$:

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iuy}\, du - \int\limits_{-A}^{A} f(u) e^{iuy}\, du \right| < \frac{\pi}{\lambda}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y)\, dy - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \int\limits_{-A}^{A} f(u) e^{iuy}\, du\, dy \right| < \frac{2\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\lambda}\varepsilon = \varepsilon.$$

Меняем порядок интегрирования во втором интеграле левой части.

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A} f(u)\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)}\,dy\,du\right| < \varepsilon \quad \forall A \geq A_0.$$

Последнее соотношение означает сходимость интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)}\,dy\,du$$

и равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)}\,dy\,du. \qquad (13)$$

2) Вычислим внутренний интеграл в правой части (13):

$$\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)}\,dy = \frac{e^{i\lambda(u-x)} - e^{-i\lambda(u-x)}}{i(u-x)} = 2\frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x}.$$

Таким образом, из (13) следует равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\widehat{f}(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{\sin\lambda(u-x)}{u-x}\,du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt. \quad (14)$$

3) Покажем, что предел правой части (14) при $\lambda \to +\infty$ равен $\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$.

Преобразуем разность

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big),$$

учитывая значение интеграла Дирихле

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt - \frac{f(x-0)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[f(x+t)-f(x+0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\left[f(x+t)-f(x-0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt. \tag{15}$$

Проанализируем первое слагаемое в правой части (15).

С пока произвольным $\delta > 0$ выполнено равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[f(x+t)-f(x+0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}\left[f(x+t)-f(x+0)\right]\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt + \int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{f(x+t)}{\pi t}\sin\lambda t\,dt - \frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Интеграл $I_2$ стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$, так как он является синус-преобразованием Фурье функции

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t)}{\pi t} & \text{при } t \geq \delta, \\ 0 & \text{при } 0 \leq t < \delta, \end{cases}$$

которая принадлежит $L_1(\mathbb{R})$.

Интеграл $I_3$ стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$, так как

$$\int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt = \int\limits_{\lambda\delta}^{+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi}\, d\xi \to 0 \quad \text{при } \lambda \to +\infty.$$

Наконец, интеграл $I_1$ допускает оценку

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} \big[f(x+t) - f(x+0)\big] \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} \big|f(x+t) - f(x+0)\big| \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} M t^{\alpha} \frac{1}{t}\, dt = \frac{M}{\alpha\pi} \delta^{\alpha}.$$

Значит, если выбрать $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{M}{\alpha\pi}\delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3},$$

а затем указать $\lambda_0$ так, чтобы при $\lambda \geq \lambda_0$:

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |I_3| < \frac{\varepsilon}{3},$$

то модуль первого слагаемого в (15) будет меньше $\varepsilon$.

Аналогично оценивается второе слагаемое в (15). $\blacksquare$

*Замечание.* Проанализируем разложение в интеграл Фурье в случае, когда **функция $f(x)$ – четная на $\mathbb{R}$.**

Во-первых,

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin xy\,dx =$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx$$

и, следовательно, $\widehat{f}(y)$ – четная функция.

Во-вторых,

$$\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big) = \frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{-ixy}\,dy = \frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\cos xy\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to+\infty} 2\int_{0}^{\lambda} \widehat{f}(y)\cos xy\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \widehat{f}(y)\cos xy\,dy.$$

Аналогично, для случая **нечетной функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$** имеем

$$\widehat{f}(y) = 2i \int\limits_0^{\infty} f(x) \sin xy \, dx \quad \text{– нечетная функция,}$$

$$\frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)(-i) \sin xy \, dy = \frac{-i}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \widehat{f}(y) \sin xy \, dy.$$

*Замечание.* Для произвольной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 20, ее разложение (12) в интеграл Фурье можно записать и с помощью косинус- и синус-преобразований Фурье

$$a(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx, \quad b(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin xy\,dx$$

в следующем виде (**интегральная формула Фурье**):

$$\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\big(a(y)\cos xy + b(y)\sin xy\big)\,dy.$$

## 8.4. Примеры

### I. Построение преобразования Фурье

Рассмотрим на $0 \le x < \infty$ функцию $f(x) = e^{-ax}$, где $a > 0$ – заданный параметр.
Построим ее образ Фурье $\widehat{f}(y)$, продолжая $f(x)$ четным образом на $-\infty < x \le 0$, т.е. полагая для $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = e^{-a|x|}.$$

*Решение:*

$$\widehat{f}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{iyx}\, dx = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax} \cos yx\, dx =$$

$$= 2e^{-ax}\, \frac{y \sin yx - a \cos yx}{a^2 + y^2}\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{2a}{a^2 + y^2}. \qquad (16)$$

Отметим, что в силу формулы для обратного преобразования Фурье справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{-iyx}\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \widehat{f}(y)\cos xy\,dy$$

$$\Rightarrow e^{-|a|x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2a\cos xy}{a^2+y^2}\,dx. \qquad (17)$$

**II. Приложения преобразования Фурье к дифференциальным уравнениям**

Покажем на примере, как преобразование Фурье можно использовать для нахождения частных решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим на полупрямой $0 < x < +\infty$ уравнение

$$u'' - u = e^{-ax}, \qquad a > 0.$$

Построим частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} u'(x) = 0. \tag{18}$$

Для этого продолжим правую часть уравнения четным образом на полупрямую $-\infty < x \leq 0$: $f(x) = e^{-|a|x}$ и будем искать решение уравнения

$$u'' - u = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

в классе четных функций, удовлетворяющих условию (18).

Перейдем в (19) к образам Фурье, учитывая линейность этого преобразования

$$\widehat{u''} - \widehat{u} = \widehat{f}(y), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что если

$$u(x) \quad \mapsto \quad \widehat{u}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{iyx}\,dx,$$

то в классе функций, удовлетворяющих (18), справедливы соответствия

$$u'(x) \quad \mapsto \quad \widehat{u'}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u'(x)e^{iyx}\,dx = u(x)e^{iyx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - iy\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{iyx}\,dx =$$

$$= -iy\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{iyx}\,dx,$$

$$u''(x) \quad \mapsto \quad \widehat{u''}(y) = (-iy)^2\widehat{u}(y) = -y^2\widehat{u}(y).$$

Поэтому, с учетом формулы (16), получим для образа Фурье $\widehat{u}(y)$ **алгебраическое уравнение**:

$$-y^2\widehat{u}(y) - \widehat{u}(y) = \frac{2a}{a^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{u}(y) = \frac{-2a}{(a^2+y^2)(1+y^2)}.$$

Формула разложения в интеграл Фурье позволяет теперь восстановить искомую функцию:

$$u(x) = \frac{-2a}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy\,dy}{(a^2+y^2)(1+y^2)} = \frac{-2a}{\pi(a^2-1)}\left[\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos xy\,dy}{1+y^2} - \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos xy\,dy}{a^2+y^2}\right] =$$

$$= \frac{-a}{a^2-1}\left[e^{-|x|} - \frac{1}{a}e^{-a|x|}\right].$$

[на последнем шаге использована формула (17)]

Таким образом, искомое решение на полупрямой $0 \le x < +\infty$ имеет вид

$$u(x) = \frac{-a}{a^2 - 1}\left(e^{-x} - \frac{1}{a}e^{-ax}\right). \qquad \blacksquare$$

Это была последняя лекция этого краткого курса по теме «Ряды и интегралы Фурье».

**Спасибо за внимание!**